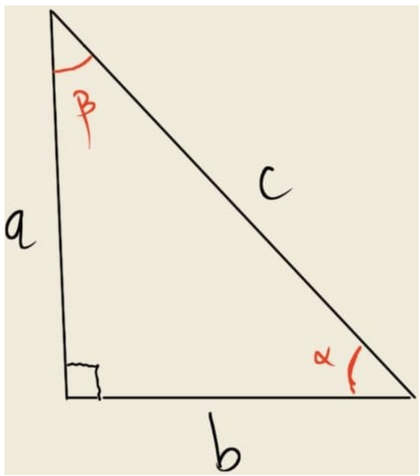
Razones trigonométricas

En esta sección estudiaremos las razones trigonométricas. Para esto, consideremos el siguiente triángulo rectángulo:



Para el ángulo β (beta) definimos:

Definición 0.1.

1. $sen(\beta) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$.
2. $cos(\beta) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$.
3. $tan(\beta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{b}{a}$.
4. $sec(\beta) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{c}{a}$.
5. $cosec(\beta) = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{b}$.
6. $cotan(\beta) = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{a}{b}$.

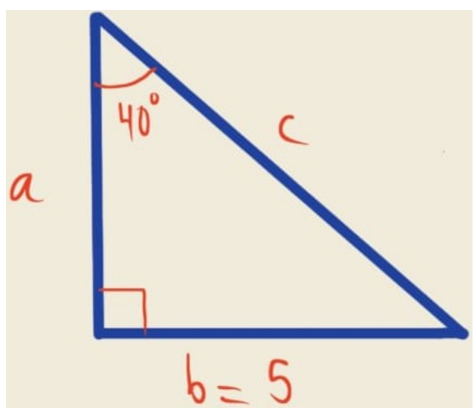
Observación 0.1. *Recuerda que* ***cateto opuesto*** *a un ángulo, por ejemplo α (alfa) del triángulo rectángulo anterior, es el cateto que está enfrente del ángulo α. El* ***cateto adyacente****, con respecto a α, es el cateto que está junto a α. Por último, la* ***hipotenusa*** *siempre será el lado más largo del triángulo rectángulo.*

Ejercicio 0.1. *Teniendo la observación en mente, define las razones trigonométricas para el ángulo α del anterior triángulo rectángulo.*

1. $sen(\alpha) =$
2. $cos(\alpha) =$
3. $tan(\alpha) =$
4. $sec(\alpha) =$
5. $cosec(\alpha) =$
6. $cotan(\alpha) =$

Ahora, usando las razones trigonométricas, veamos cómo podemos obtener información de un triángulo rectángulo teniendo información parcial de él, como el valor de un ángulo y el valor de un cateto.

Ejemplo 0.1. *Considere el siguiente triángulo:*



Calcule el valor de a y c, sabiendo que $sen(40°) \approx 0.64278$, $cos(40°) \approx 0.7660$ y $tan(40°) \approx 0.8391$.

Solución. Primero, para calcular el valor de a, podemos usar la tangente del ángulo de 40°, pues sabemos que $0.8391 \approx tan(40°) = \frac{b}{a} = \frac{5}{a}$. Así, podemos despejar a, obtenemos:

$$a = \frac{5}{0.8391} \approx 5.95.$$

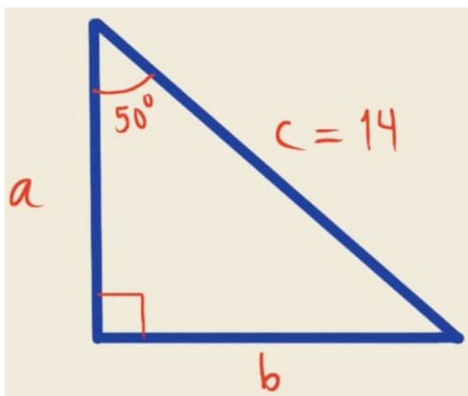
Por último, para calcular c, podemos usar el seno del ángulo de $40°$ porque $0.64278 \approx sen(40°) = \frac{5}{c}$. Luego, despejamos c, obtenemos:

$$c = \frac{5}{0.64278} \approx 7.77.$$

†

Consideremos otro ejemplo, un poco más complicado.

Ejemplo 0.2. *Considere el siguiente triángulo:*



Calcule el valor de a y b.

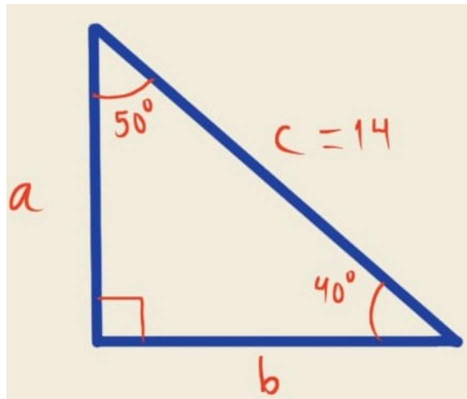
Solución. En este caso no podemos hacer uso de las razones trigonométricas del ángulo de $50°$ porque no nos dan el valor de $sen(50°)$, $cos(50°)$ o $tan(50°)$. Pero lo que sí podemos hacer es lo siguiente:

1. Recuerde que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$. Así el valor del ángulo restante es $40°$.

2. Del ejemplo previo sabemos los valores de $sen(40°)$, $cos(40°)$ y $tan(40°)$, los cuales son:

$$sen(40°) \approx 0.64278,\ cos(40°) \approx 0.7660 \text{ y } tan(40°) \approx 0.8391.$$

3. Procedemos a calcular los valores de a y b. En efecto, consideremos la siguiente figura:



Entonces usamos $sen(40°) \approx 0.64278$ para calcular a porque

$$0.64278 \approx sen(40°) = \frac{a}{14}$$

y, despejando a, obtenemos que

$$a = 14(sen(40°)) = 14(0.64278) \approx 8.99.$$

Ahora procedemos a calcular el valor de b y lo podemos hacer de dos formas con $cos(40°)$ o $tan(40°)$.

i) Con $cos(40°)$: sabemos que $0.7660 \approx cos(40°) = \frac{b}{14}$ y, despejando b, obtenemos:

$$b = 14(cos(40°)) = 14(0.7660) \approx 10.724.$$

ii) Con $tan(40°)$: $0.8391 \approx tan(40°) = \frac{a}{b} = \frac{8.99}{b}$ y, despejando b, obtenemos:

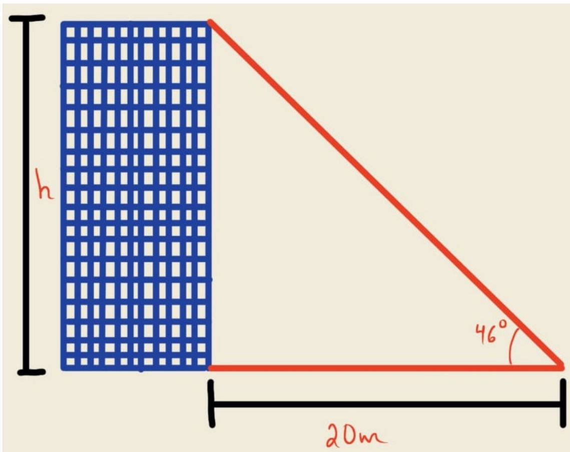
$$b = \frac{8.99}{0.8391} \approx 10.713.$$

Note que para poder usar la $tan(40°)$, previamente tuvimos que haber calculado el valor de a.

†

Por último, consideremos un ejemplo de aplicación en la vida real.

Ejemplo 0.3. *Se sitúa un punto a 20 metros de un edificio. Si el ángulo de elevación al punto más alto del edificio es de 46°, encuentra la altura del edificio, sabiendo que* $cos(46°) \approx 0.6946$*,* $sen(46°) \approx 0.7193$ *y* $tan(46°) \approx 1.03$*.*



Solución. En este caso usamos la $tan(46°)$ porque:

$$1.03 \approx tan(46°) = \frac{h}{20}$$

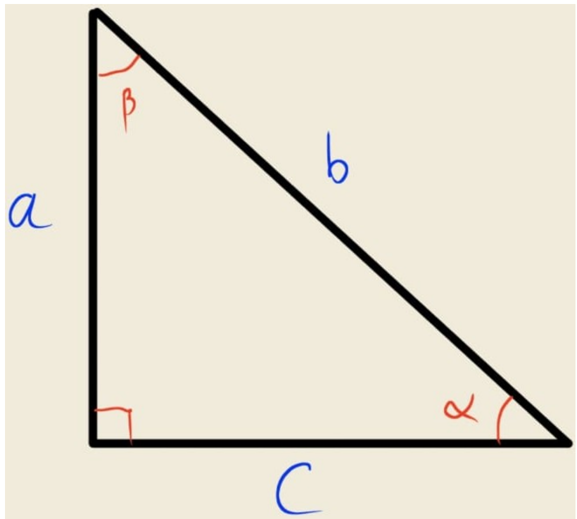
y, despejando h, obtenemos:

$$h = 20(tan(46°)) = 20(1.03) \approx 20.6\text{m}.$$

†

Ahora es turno de aplicar lo aprendido. Así, resuelve los siguientes ejercicios.

Ejercicios 0.1. *Resuelve el siguiente triángulo rectángulo según los datos proporcionados:*



1. $\alpha = 32°$ *y* $b = 4$, *sabiendo que* $cos(\alpha) \approx 0.8480$, $sen(\alpha) \approx 0.5299$ *y* $tan(\alpha) \approx 0.6249$.

2. $\beta = 46°$ *y* $a = 5$, *sabiendo que* $cos(\beta) \approx 0.6946$, $sen(\beta) \approx 0.7193$ *y* $tan(\beta) \approx 1.03$.

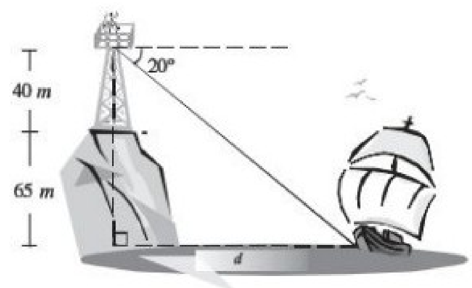
3. $b = \sqrt{17}$ *y* $a = 2$.

4. $c = 13$ *y* $\beta = 25°$, *sabiendo que* $cos(\beta) \approx 0.9063$, $sen(\beta) \approx 0.4226$ *y* $tan(\beta) \approx 0.4663$.

5. $\alpha = 45°$ *y* $a = 13$, *sabiendo que* $cos(\alpha) \approx 0.7071$, $sen(\alpha) \approx 0.7071$ *y* $tan(\alpha) \approx 1$.

6. *Resuelve los siguientes ejercicios:*

1. En una torre de 40 m que está sobre un peñasco de 65 m de alto junto a una laguna, se encuentra un observador que mide el ángulo de depresión de 20° de un barco situado en la laguna. ¿A qué distancia de la orilla del peñasco se encuentra el barco?



2. A una distancia de 10 m de la base de un árbol, la punta de éste se observa bajo un ángulo de 23°. Calcula la altura del árbol.