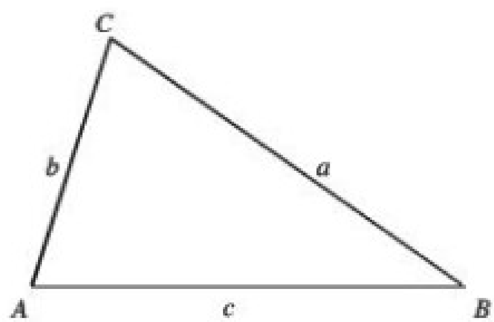
En esta sección resolveremos triángulos que no son triángulos rectángulos, es decir, triángulos tales que ninguno de sus ángulos internos miden 90°. Estos objetos de estudio son llamados triángulos **oblicuos** u **oblicuángulos**. En efecto, tenemos:

Ley de senos. La ley de los senos versa:



Ley de senos:

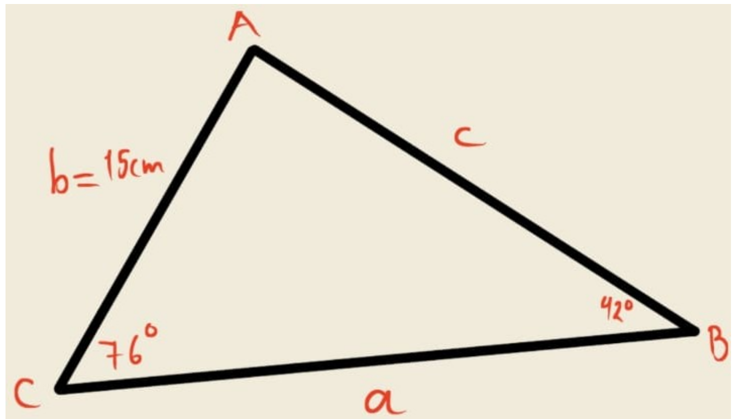
$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$$

La ley de senos se utiliza cuando:

- Los datos conocidos son 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Los datos conocidos son 2 ángulos y cualquier lado.

Ahora algunos ejemplos de cómo utilizar esta ley.

Ejemplos 0.1. *1. Considere el siguiente triángulo y calcule la medida de los lados y ángulos restantes.*



Tenga en cuenta que $sen(42°) \approx 0.6691$ *y* $sen(76°) \approx 0.9703$.

Solución. Para calcular el ángulo restante, sabemos que:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Ahora despejamos $\angle A$ porque es el ángulo restante. Así, obtenemos:

$$\angle A = 180° - \angle B - \angle C = 180° - 76° - 42° = 62°.$$

Luego, por hipótesis, sabemos que:

$$\frac{b}{sen(B)} = \frac{15}{sen(42°)} = \frac{15}{0.6691} \approx 22.41.$$

Así, aplicando la ley de los senos, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{a}{sen(62°)} = \frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} \approx 22.41 \text{ y } 22.41 \approx \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)} = \frac{c}{sen(76°)}$$

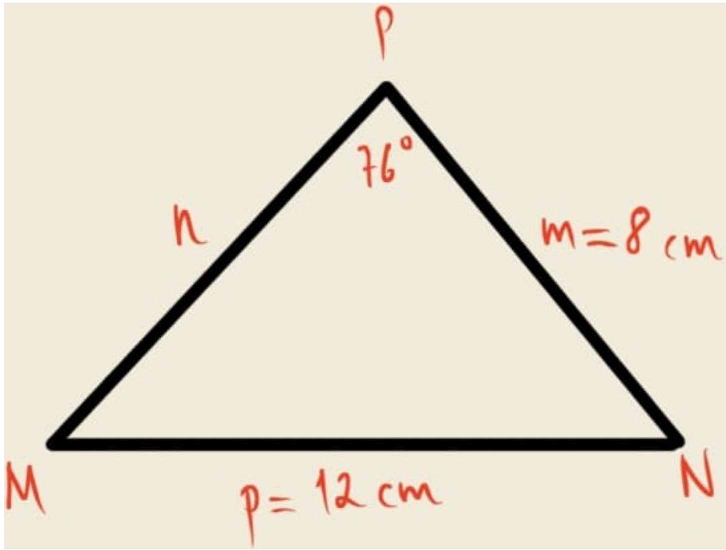
De las cuales despejamos a y c, respectivamente. Por lo que obtenemos:

$$a \approx 22.41(sen(62°)) \approx 19.78 \text{ y } c \approx 22.41(sen(76°)) \approx 21.74,$$

donde $sen(62°) \approx 0.8829$.

†

2. *Considere el siguiente triángulo y calcule la medida de los lados y ángulos restantes.*



Considere que $sen(76°) \approx 0.97029$.

Solución. Primero establecemos la ley de los senos, según el triángulo dado:

$$\frac{p}{Sen(P)} = \frac{n}{sen(N)} = \frac{m}{sen(M)}$$

Ahora sustituimos los valores conocidos:

$$12.36 \approx \frac{12}{sen(76°)} = \frac{n}{sen(N)} = \frac{8}{sen(M)}$$

Ahora note que podemos despejar $sen(M)$ y, posteriormente, despejar M porque conocemos $m = 8$, contrario al cociente $\frac{n}{sen(N)}$ que no sabemos el valor de n y de $sen(N)$. Así, despejamos $sen(M)$ y despejamos m, tenemos:

$$sen(M) = \frac{8}{12.36} \approx 0.64 \Longrightarrow \angle M = sen^{-1}(0.64) \approx 40°.$$

Sabiendo esto podemos calcular el valor de $\angle N$. En efecto, tenemos:

$$180° = \angle M + \angle N + \angle P = 40° + 76° + \angle N$$

$$\Longrightarrow \angle N = 180° - 40° - 76° = 64°.$$

Por último, procedemos a calcular el valor de n. Así tenemos:

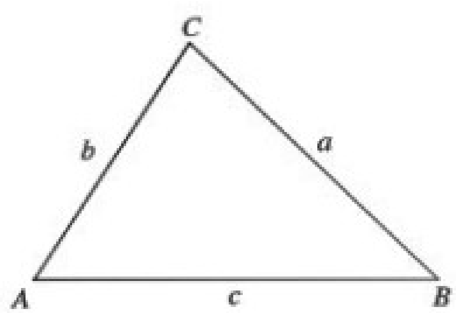
$$n = 12.36(sen(64°)) = 12.36(0.89) \approx 11,$$

donde $sen(64°) \approx 0.89$.
Por tanto, en suma, tenemos:

1. $\angle M = 40°$
2. $\angle N = 64°$
3. $n = 11$

†

Ley de cosenos. Ahora enunciamos la ley de cosenos:



Ley de cosenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

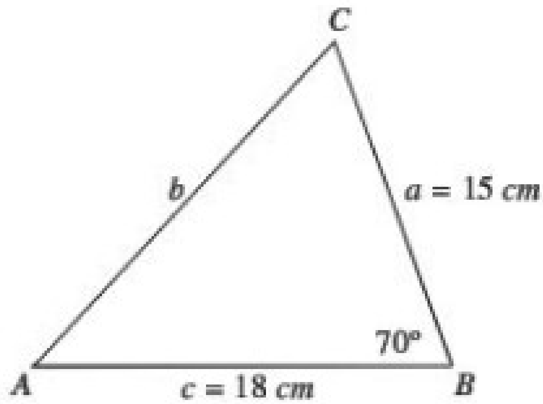
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

La ley de cosenos se utiliza cuando:

- Se tiene el valor de 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos.
- Se tiene el valor de los 3 lados.

Ejemplos 0.2. *1. Resuelva el siguiente triángulo:*



Solución. Primero, calculamos b. En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac(cosB) = (15)^2 + (18)^2 - 2(15)(18)cos(70°) \\ &= 549 - 540(0.34202) = 549 - 185 = 364 \end{aligned}$$

y sacando raíz cuadrada, obtenemos:

$$b = \sqrt{364} = 19.07 \text{ cm.}$$

Segundo, podemos calcular cualquiera de los ángulos restantes. Calculemos el $\angle A$. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA) \Longrightarrow cosA &= \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \Longrightarrow A &= cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\ &= cos^{-1}\left(\frac{324 + 364 - 225}{2(19.07)(18)}\right) \\ &= cos^{-1}\left(0.6739\right) \\ &= 48° \end{aligned}$$

Ahora, conociendo dos ángulos, podemos calcular el tercer ángulo mediante:

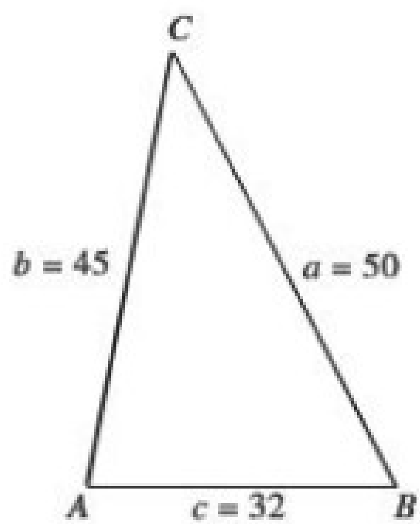
$$180° = 48° + 70° + \angle C \Longrightarrow \angle C = 180° - 48° - 70° = 62°$$

En suma, tenemos:

1. $b = 19.07$ cm
2. $\angle A = 48°$
3. $\angle C = 62°$

†

2. *Resuelva el siguiente triángulo:*



Solución. En este ejemplo tenemos que calcular el valor de los ángulos internos del triángulo dado. Así, tenemos las dos ecuaciones siguientes:

i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(cosA)$

ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(cosB)$,

de las cuales despejamos $\angle A$, $\angle B$ y, posteriormente, sustituimos valores. Por tanto, tenemos:

i) $A = cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = cos^{-1}(0.1906) = 79°$

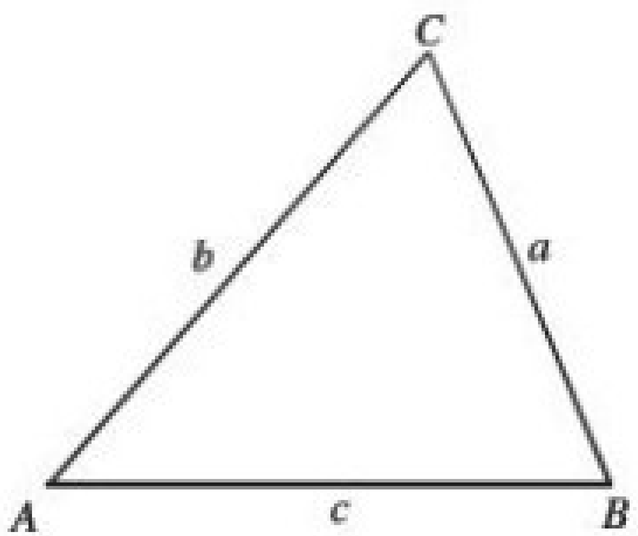
ii) $B = cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) = cos^{-1}(0.4684) = 62°$

Por último, calculamos el valor del ángulo C mediante:

$$C = 180° - 62° - 79° = 39°$$

†

Ley de tangentes. Por último enunciamos la ley de tangentes:



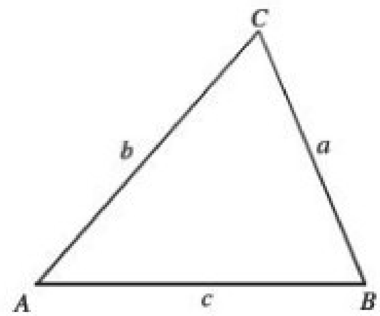
Fórmulas:

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}, \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{tan\left(\frac{B+C}{2}\right)} \text{ y } \frac{a-b}{a+b} = \frac{tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Ejemplos 0.3. *1.*

2.

Ejercicios. Resuelve el siguiente triángulo oblicuo de acuerdo con los datos proporcionados:



1. $\angle B = 57^\circ\, 20'$, $\angle C = 43^\circ\, 39'$, $b = 18$
2. $\angle A = 63^\circ\, 24'$, $\angle C = 37^\circ\, 20'$, $c = 32.4$
3. $\angle A = 85^\circ\, 45'$, $\angle B = 26^\circ\, 31'$, $c = 43.6$
4. $\angle C = 49^\circ$, $\angle A = 54^\circ\, 21'$, $a = 72$
5. $\angle B = 29^\circ$, $\angle C = 84^\circ$, $b = 12.3$
6. $\angle A = 32^\circ$, $\angle B = 49^\circ$, $a = 12$
7. $a = 5$, $\angle A = 32^\circ$, $b = 8$
8. $c = 13$, $b = 10$, $\angle C = 35^\circ\, 15'$
9. $\angle B = 56^\circ\, 35'$, $b = 12.7$, $a = 9.8$
10. $a = 9$, $c = 11.5$, $\angle C = 67^\circ\, 21'$
11. $a = 15$, $b = 16$, $c = 26$
12. $a = 32.4$, $b = 48.9$, $c = 66.7$
13. $a = 100$, $b = 88.7$, $c = 125.5$
14. $a = 15$, $b = 12$, $c = 20$
15. $a = 12$, $b = 15$, $\angle C = 68^\circ$
16. $a = 28$, $c = 32$, $\angle B = 76^\circ$
17. $b = 45$, $c = 75$, $\angle A = 35^\circ$
18. $a = 12.6$, $b = 18.7$, $\angle C = 56^\circ$